

# A HUN-REN-ELTE Numerikus Analízis és Nagy Hálózatok Kutatócsoport (Numnet) rövid bemutatása

Karátson János

ELTE TTK Matematikai Intézet



HUN-REN TKI Workshop, 2024. szept. 25.

# Közreműködő kutatók

Faragó István (ELTE–BME)  
Simon Péter (ELTE)  
Karátson János (ELTE–BME)  
Csomós Petra (ELTE)  
Havasi Ágnes (ELTE)  
Fekete Imre (ELTE)  
Izsák Ferenc (ELTE)  
Pfeil Tamás (ELTE)  
Horváth Róbert (BME)  
Takács Bálint (BME)  
Boda Livia (BME)  
Katona Gyula Y. (BME)  
Mincsovics Miklós (BME)  
Sebestyén Gabriella (BME)  
Polner Mónika (Szegedi TE)  
Pituk Mihály (Veszprém PE)



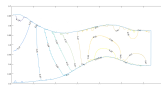
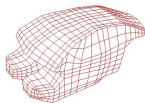
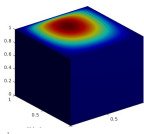
ELTÉ-s csoportkép 2024 tavaszán

# Fő kutatási területek

- Differenciálegyenletek (DE-k) numerikus módszerei
  - hatékony algoritmusok fejlesztése és analízise
  - kvalitatív megbízhatóság elmélete
  - neurális hálók felhasználása
- A numerikus módszerek alkalmazásai
  - környezeti modellek (fizikai, kémiai stb. jelenségek DE-ei)
  - biológiai modellek (immunkémia, járványterjedés)
- Hálózati modellek analízise
  - járványterjedési modellek
  - gráfelméleti modellek

# Differenciálegyenletek (DE-k) numerikus módszerei

- Vizsgált DE-típusok: valós modellfeladatok motiválják, pl.:
  - képlékeny-rugalmas anyagváltozás
  - akusztikai jelenségek
  - járványterjedési folyamatok
  - hővezetés
  - aerodinamika
  - konvekció-diffúziós folyamatok
  - légszennyezés-terjedés



- Pl.:  $\frac{\partial u_i}{\partial t} - \text{div}(\mathbf{K}_i \nabla u_i) + \mathbf{w}_i \cdot \nabla u_i + R_i(x, u_1, \dots, u_\ell) = \omega_i$

# Differenciálegyenletek (DE-k) numerikus módszerei

Végeselemes (FEM) és véges differenciás (FDM) megoldások

- A konstrukciók néhány alapgondolata: stacionárius eset
  - Lineáris PDE-k: az iterációk operátor-prekondicionálása
  - Nemlineáris PDE-k: kvázi-Newton-linearizálás spektrális ekvivalencia alapján  $\rightarrow F'(u_n) \sim B_n$
  - A konvergencia rácsfüggetlensége
- A konstrukciók néhány alapgondolata: időfüggő eset
  - Operátorszeletelés
  - Rendnövelés, Richardson-extrapoláció
  - Nemstandard idődiszkretizációk
- Kvalitatív elmélet: a módszerek megbízhatósága
  - Nemnegativitás-megőrzés, maximum/minimum-elvek
  - Oszcillációk, megmaradási törvények

# A járványterjedés matematikai modellezése differenciálegyenletekkel

Az alapprobléma: hogyan terjed egy adott betegség az emberek különböző osztályai között (egészséges, de fertőzhető; fertőzött; tovább nem fertőző)? Két alapeset: a fertőzés

- közvetlenül történik (pl. COVID);
- valamilyen közvetítő (pl. malária, szúnyogok) által történik.

Matematikai szempontból két típusú modellt vizsgálunk:

- Folytonos matematikai modellek (KDE-rendszerek: az egyedek száma, illetve PDE-rendszerek: a térbeli eloszlást is számoljuk)
- Diszkrét modellek a fenti esetekre

# A járványterjedés matematikai modellezése differenciálegyenletekkel

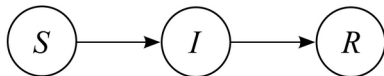
Az alapprobléma: hogyan terjed egy adott betegség az emberek különböző osztályai között (egészséges, de fertőzhető; fertőzött; tovább nem fertőző)? Két alapeset: a fertőzés

- közvetlenül történik (pl. COVID);
- valamilyen közvetítő (pl. malária, szúnyogok) által történik.

Matematikai szempontból két típusú modellt vizsgálunk:

- Folytonos matematikai modellek (KDE-rendszerek: az egyedek száma, illetve PDE-rendszerek: a térbeli eloszlást is számoljuk)
- Diszkrét modellek a fenti esetekre

Egy klasszikus példa – a SIR-modell:



Matematikai modell – KDE-rendszer:

$$\begin{aligned}S'(t) &= -\delta S(t) \cdot I(t), \\I'(t) &= \delta S(t) \cdot I(t) - \gamma I(t), \\R'(t) &= \gamma I(t).\end{aligned}\tag{1}$$

Finomabb modellek:  $SEIR$ ;  $SEIR(h)$  és  $SEI(m)$ ;  $S(x, y, t)$ ...

- Kvalitatív analízis (nemnegativitás, monotonitás): a numerikus modell idődiszkretizációs lépésközére feltételek vizsgálata
- Számos egyéb terjedési folyamatra alkalmazhatók az eredmények, pl. égés (erdőtűz), társadalmi (hírterjedés).

# Hálózati folyamatok dinamikus modellezése

Két matematikai terület összekapcsolása:  
hálózatalmélet (gráfelmélet) és dinamikai rendszerek.

Motiváció:

- fertőzésterjedés hálózaton,
- aktivitás terjedése neuronhálózatban,
- információ terjedése társadalmi hálózatokban.

Matematikai modell:

- Adott gráfelméleti tulajdonságokkal (fokszámeloszlás, átmérő...) rendelkező gráfok: pl. véletlen gráfok (Erdős-Rényi, Barabási-Albert), többdimenziós rácsok
- A csúcsok lehetséges állapotainak állapottere, pl. SIR-járványterjedés
- Dinamika, amely szerint a csúcsok állapota időben változik

# Hálózati folyamatok dinamikus modellezése

Matematikai vizsgálat:

- sztochasztikus modell: Markov-folyamat,
- egyedalapú sztochasztikus szimuláció,
- átlagtér-közelítések,
- fokszámalapú közelítések,
- populációszintű közelítés, alacsony dimenziós dinamikai rendszerek, bifurkációelmélet.

Új kutatási irányok:

- Irányításelméleti kérdések (lezárás, vakcina alkalmazása).
- Időben változó hálózatok.
- Magasabbrendű kapcsolatok figyelembe vétele, hipergráfok (nemcsak élek mentén történik a fertőzés, hanem nagyobb struktúrákban, szuperfertőzés).

Köszönjük a figyelmet!